弾性学と材料力学の歴史[注)]

(Ⅱ-1)

アイザック　トドハンター著
カール　ピアソン編著
(訳)　村上一男[1)]　並川宏彦[2)]　村上一實[3)]

第X章　サン・ブナン，1850—1886年

第I節　ねじり

〔1.〕 ポアッソンやコーシーと同列におくのが正当である偉大なフランスの弾性学者の後期の研究について，若干の説明をして，第2巻をはじめよう。1853年6月13日までの第I巻で引用した最後の論文からは，報告すべき何もない。しかし，**学会**(*Société philomathique*)〔**『会報』**(*Bulletin*)，1853年2月26日，あるいは**『学士院』**(*L'Institut*)，1002号，1853年3月16日〕で講演された**『ねじりに関する種々の結果』**(*Divers résultats relatifs à la torsion*)と題するささやかな覚書によれば，著者は，この数年の間，新しいねじり理論にこつこつと取り組んでいたことがうかがえる。1853年6月13日に，彼の画期的な論文がアカデミーで講演された〔**『報告書』**(*Comptes rendus*)，XXXVI巻，1028頁〕。その論文は**『外国の学者達の論文集』**(*Mémoires des Savants étrangers*)，XIV巻，1855年，233—560頁に，次の表題で掲載された。

『角柱の曲げに関する考察，および一般に弾性固体の内部つり合いに関する考察を含み，かつ同時に作用する種々の力に対する角柱の抵抗を計算するための実用公式を含んだ角柱のねじりに関する論文』(*Mémoire sur la Torsion des Prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément.*)

われわれは第I巻で，この論文を**ねじり**に関する論文として引用したが，今後もそうすることにしよう。

アカデミーはこの論文をコーシー(Cauchy)，ポンスレ(Poncelet)，ピオベール(Piobert)およびラーメ(Lamé)からなる委員会へ付託した。ラーメが作成した委員会の報告〔**『報告書』**(*Comptes rendus*)，XXXVII巻，1853年12月26日，984—8頁〕はその論文を激賞している。結言を引用すると，次のようである。

> われわれが報告しようとする論文は，種々の理由で，すなわちそれが産業にもたらしている数多くのものおよび新しい結果によって，称賛に価する。それは弾性のつり合い理論の重要性をもう一度確認している。それは，混合法を使用して，この理論に頼ろうとする技術者が数学解析から実際に知られているすべての方法を，どのようにして利用できるかを教えてくれる。それは，表・図および凹凸模型[4)]により，この種の研究において直ちに実際に適用できる結果に到達するために，必然的にたどらねばならない手順を示している。結局そ

1)　立命館大学理工学部　名誉教授　2)　桃山学院大学社会学部　教授　3)　大阪産業大学短期大学部　教授

4)　これらの多数の模型の写しは，現在大学の数学模型箱の中に保管されている。それらは原論文の貧弱な木版よりも，種々の断面のゆがみを，ずっとよく表わしている。

注)　本稿は Isaac Todhunter edited and completed by Karl Pearson: A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to Lord Kelvin, Dover Pub., Inc. (復刻版，1960年) の第2巻を翻訳したものである。

原典は2巻から成り，第2巻が2部に分かれている。第1巻 (xvi+936頁) の初版は1886年に，第2巻の第1部 (xiv+762頁) と第2部 (546頁) は1893年に Cambridge Univ. Press から出版されており，以来ほぼ百年の歳月がすぎている。第1巻では，1638年のガリレイのはりの研究から1850年以前のサン・ブナンの研究までを1631節に分け，第2巻では，1850年以降のサン・ブナンの研究からウイリアム・トムソン郷の1890年にいたる研究までを1818節に分け，数百の論文を一つ一つ解説している。

なお，第1巻の翻訳は大阪産業大学論集 (自然科学編) 68号以降に掲載されている。

れは，見解の多様性によって，数学者の科学と技術者の科学とを結びつけることができるものの一つの新しい例を示している。(988頁)

報告書は論文を簡明に説明している。サン・ブナン自身による別の説明が『**M. ドウ・サン・ブナンの科学上の著作と表題についての説明**』(*Notice sur les travaux et titres scientifiques de M. de Saint-Venant*)，パリ，1858年，19—31頁および71—80頁に見られる。この著作はサン・ブナンが再び**学士院**(*Institut*)の候補者になりそうであった1864年に出版された同じ表題の著作とともに，1864年以前の著者の研究のすぐれた**要約**を示している。それらを簡単に『**説明Ⅰ**』，『**説明Ⅱ**』と呼ぶことにしよう。

〔2.〕 論文自体は主として**角柱**のねじりで占められており，実にさまざまの断面が取り扱われている。ねじりにおけるこの特殊な問題はクレープシュ(Clebsch)によって**サン・ブナン問題**(*Das de Saint-Venantsche Problem*)〔『**弾性学**』(*Theorie der Elasticität*)，74頁〕と名付けられたが，彼にしたがって，それを**サン・ブナン問題**と名付けることにしよう。論文は13章より成っている。

3. 第1章は233—236頁を占め，論文の内容についての序言的な概説となっている。弾性体の数点の変位の値が与えられると，応力は簡単な微分によって容易に求められる。しかし，その逆の問題——応力が与えられたときに変位を求めること——はそれらを示す微分方程式を積分する方法がまだ知られていないので，一般に解かれていない。したがって，サン・ブナンは**混合法または半逆法**(*méthode mixte ou semi-inverse*)の採用を提案している。それは一部の変位および一部の応力を仮定し，残りの変位と残りの応力がとらねばならない値を，正確な解析により決定する方法である。角柱のねじりへ進む前に，サン・ブナンは彼の論文の第3章と第4章で，この**混合法**を簡単な問題に適用して，それを説明している。

〔4.〕 第2章は236—288頁を占め，ひずみと応力を解析し，弾性体のつり合いの一般公式を調べている。1868年に，サン・ブナンは弾性の基本公式についてのもう一つの初歩的な討論を，モアニオ(Moigno)の『**静力学**』(*Statique*)に寄稿した。この後の著作は幾分充実したもので，著者のさらに成熟した見解を含んでいる。しかし，先の著作も非常によい。採用された論述の主な特徴を書き留めてみよう。

(α) 236頁に，サン・ブナンは，変位を**平均移動**(*déplacements moyens*)あるいは**一定数の分子群の重心の移動**(*déplacements des centres de gravité de groupes d'un certain nombre de molécules*)として定義している。このように，彼は分子の観点から出発しているが，この定義が彼の推論の過程に絶対に必要であるとは思われない。

(β) 237—248頁に，ひずみの解析がある。最初，ナヴィエ(Navier)とヴィカ(Vicat)によって定義され(本書の第Ⅰ巻，付録，覚書A(6)，参照)，その後『**石版刷の講義録**』(*Cours lithographié*)においてサン・ブナンによって理論的に考察された(本書の1564*節参照)すべりが，ここではじめてその名で紹介され，その物理学的意義から直接一般弾性学へ導入されている。元直角であった二つの線のすべりは，ひずんだ後，**それらの線の間の角度の余弦**と定義されている(238頁)。

(γ) 239頁で，サン・ブナンは，彼の研究を弾性限度内の非常に小さなひずみに，注意深く限定している。したがって，彼が後に(281—288頁)**破壊**(*rupture*)の条件について述べていることは，彼のねじり問題へ適用されるとき，弾性限度だけについて言っているものと解釈されねばならない。実際，ある材料については，降伏点以下の任意の初期荷重で永久ひずみを生じ，実用上は危険ではない(すなわち，サン・ブナンの言葉を用いると，材料は「弱められ」ていない)。論文に示されているねじり破壊の条件は，次のいずれかの場合にだけ価値のあるものと見なすことができる。すなわち，(1)材料は弾性に富み，破壊近くまで**フックの法則にしたがう**(この本の第Ⅰ巻，覚書Dの図の鋼棒Hを参照)，または(2)材料はほぼ降伏点にいたるまで平易に伸びる状態をもっている。

(δ) 242—5頁に，s_r および $\sigma_{rr'}$ の一般式がある。第一のものは1821年のナヴィエの論文で，ナヴィエによるもので，第二のものはサン・ブナンがラーメによるものとしているが〔『**弾性…講義**』(*Leçons…l'élasticité*)，1852年，46頁〕，それ以前に1847年に示

されていた(1368*節参照)。第二のものから，主すべりおよび最大すべりの議論が自然に出てくるし，また，すべりはすべり角の二等分線上で，すべりの大きさの半分の伸びと縮みに等しいというサン・ブナンの定理の証明も出てくる(1570*節参照)。最後に，ひずみは小さい変位に対して変位の微分商で表わされる(246—8頁)。脚注では，大きい変位にに対するひずみの値に言及している(本書の1618*節参照)。

(ε) 次に，248—254頁で応力の解析へ移っている。応力は分子的な観点から，次のように定義されている。

一つの物体の内部または二つの物体の境界の極限の部分に想像された小さな平面の二つの側の一つをとって，この側に位置する分子が反対側の分子に及ぼす全作用の合力で，その方向がこの面を横切るものを，一般にこの一つの側への圧力と呼ぶ。これらの力のすべては，それらを合成するために，同じ点の上に，力に平行に移動されるものと仮定される(248頁)。

読者はこの定義を426*，440*，546*，616*，678—9*および1563*節と比較して，応力の定義の進化の跡をたどることに興味を覚えるだろう。

サン・ブナンはこの定義からコーシーの定理(606*と610*節参照)と $\widehat{rr'}$ の式を推論している。253頁に，p_{rr} と印刷されているのは，$p_{rr'}$ の誤りである。

254頁の脚注には，$\widehat{rr'}$ の一般式が得られている。x，y，z を一点に交わるが直交しない任意の三つの線と仮定し，x'，y'，z' をそれぞれ yz，zx，xy 面に垂直な線とすると，われわれの記号で，

$$\begin{aligned}\widehat{rr'}
&=\frac{\cos rx'}{\cos xx'}\left(\widehat{xx}\frac{\cos r'x'}{\cos xx'}+\widehat{xy}\frac{\cos r'y'}{\cos yy'}+\widehat{xz}\frac{\cos r'z'}{\cos zz'}\right)\\
&+\frac{\cos ry'}{\cos yy'}\left(\widehat{yx}\frac{\cos r'x'}{\cos xx'}+\widehat{yy}\frac{\cos r'y'}{\cos yy'}+\widehat{yz}\frac{\cos r'z'}{\cos zz'}\right)\\
&+\frac{\cos rz'}{\cos zz'}\left(\widehat{zx}\frac{\cos r'x'}{\cos xx'}+\widehat{zy}\frac{\cos r'y'}{\cos yy'}+\widehat{zz}\frac{\cos r'z'}{\cos zz'}\right)\end{aligned}$$

である。証明は面積の正射影から容易に得られる。

(ζ) 次に，サン・ブナンは応力とひずみの関係を表わすことへ進んでいる(255—262頁)。彼の著作のこの部分はモアニオの『静力学』での後の論述(268頁以下参照。)またはクレープシュの彼の版に見られる一般化されたフックの法則の充実した議論(39—41頁)ほど，十分であるとは言えない。事実，応力—ひずみ関係の直線性が，本文の中で，次の仮定によって得られている。**膨脹とすべりが非常に小さい限り，圧力は一次関数であることを皆とともに認めよう**(257頁)。長い脚注(257—261頁)は中心線上に働く分子作用の観点からその問題を取り扱っている。36個の係数の15個への減少については，コーシー〔『数学演習』(*Exercices de mathématiques*)，IV巻，2頁；656*節参照〕のやり方が気に入っている。しかし，サン・ブナン——彼が常にそうであったように首尾一貫した少定数の弾性学者——は多定数の公式を次のように述べて忘れないでいる。

36個の係数から不釣合いな15個へのこの減少の可能性の原因に，若干の疑問を唱えていた。この疑問の主な誘因は，それを確立する他の方法があるということであるが，この論文の続きの中でわれわれの心を奪うことはないであろう規則正しく結晶化した物体にしか通用しないと思われ，しかも同時に変形するとき，原子群が回転や独特のひずみを受けた物体だけについてのものであるから，われわれはラーメ氏にならって一般に係数の独立性を保持しよう。このことは，彼が指摘しているように，問題の解析解をより複雑にするものではない。

原子の回転への論及は1851年のコーシーの論文で示唆された。この本の681*節参照のこと。

(η) 次に，均質性のある対称的な分布または等方性の場合におこる係数の数の減少を取り扱わなければならない。サン・ブナンは均質性と等方性についてのコーシーの定義を採用しているが，それは第I巻の606*節に載った〔『演習』(*Exercices*)，第IV巻，2頁参照〕。

そこで，物体は**均質**である，または**その弾性はすべての点で同じ方向において同じである**と言う(263頁)。

他方，**一定の弾性，すなわち点のまわりのすべての方向に等しい弾性をもつとき，物体は等方性である**(272頁)。

サン・ブナンは弾性分布の一例として，弾性的均質性の**半極**(*semi-polaire*)分布に言及している。彼は，後でみるように，1860年5月21日の論文で，問題全体を徹底的に論じた。

対称面が一つまたはそれ以上存在する種々の場合が解かれているが，ひずみによる内部仕事についてのグリーンの方程式を採用すれば，簡潔でしかも一様な方法が得られる，と私は思う。

(θ) この節でのサン・ブナンの方法の一例として，次の問題を取り上げよう。彼は一つの対称面が yz の場合に，この面に垂直なせん断は次のようになることを示した。

$$\widehat{xy}=f\sigma_{xy}+h\sigma_{zx},\quad \widehat{zx}=e\sigma_{zx}+h\sigma_{xy}\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ここで，本影係数の記号で

$$f=|xyxy|,\quad h=|xyzx|=|zxxy|,\quad e=|zxzx|$$

である。第I巻，付録覚書B。

さて，軸の適当な変換によって，これらのせん断は各々単一すべりの項で表わすことができる。この問題はモアニオの『静力学』に再録されていない。

yz 軸を x 軸のまわりに角 β だけ回転すると，次式が容易に得られる。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{z'x}&=-\widehat{xy}\sin\beta+\widehat{zx}\cos\beta\\ \widehat{xy'}&=\widehat{xy}\cos\beta+\widehat{xz}\sin\beta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xy}&=\sigma_{xy'}\cos\beta-\sigma_{xz'}\sin\beta\\ \sigma_{xz}&=\sigma_{xy'}\sin\beta+\sigma_{xz'}\cos\beta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

(iii)を(i)に入れ，そこで得られた値を(ii)に入れて，次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{xy'}&=\left(\frac{f+e}{2}+\frac{f-e}{2}\cos 2\beta+h\sin 2\beta\right)\sigma_{xy'}\\&\quad+\left(-\frac{f-e}{2}\sin 2\beta+h\cos 2\beta\right)\sigma_{xz'}\\ \widehat{xz'}&=\left(\frac{f+e}{2}-\frac{f-e}{2}\cos 2\beta-h\sin 2\beta\right)\sigma_{xz'}\\&\quad+\left(-\frac{f-e}{2}\sin 2\beta+h\cos 2\beta\right)\sigma_{xy'}\end{aligned}\right\}\cdots(\text{iv}),$$

明らかに，$\tan 2\beta=\dfrac{2h}{f-e}$ ととるならば，この最後の一組の式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{xy'}&=f_1\sigma_{xy'}\\ \widehat{xz'}&=e_1\sigma_{xz'}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

ここで，f_1 と e_1 は2次式 $\mu^2-(f+e)\mu+fe-h^2=0$ の根である。

サン・ブナンの式の変形は大体このようなものである。しかし，円錐の不変量に関する既知の問題が仕事関数に適用されるとき，この結果が直ちに得られることは明らかである。

(ι) 272頁にみられる等方性についての所見は，単一定数の論争に関係するものとして再録してもよい。

しかし，等方性は珍らしいと思われる。木材，引き伸ばした鉄または鍛造した鉄のような繊維質の物体だけでなく，溶解後に表面から中心へ冷却した粒状またはガラス状の物体は，種々の方向で異なる弾性を呈することがある。

サン・ブナンはすでに第I巻で注目したルニョー(Regnault)，サヴァール (Savart) およびポンスレ (Poncelet) の実験と所見に言及している。332*，978*，および1227*節参照。

(κ) 272—8頁に物体—応力方程式，物体—変位方程式および表面—応力方程式が推論されている。

276頁に，サン・ブナンはねじり問題に必要とするような弾性の平面分布に対する物体—変位方程式を推論している。

彼はせん断に上記の式(V)において求められた式をとり，平面系に垂直な引張力 $\widehat{xx}$ に6個の独立定数を含む次式をとっている。

$$\widehat{xx}=as_x+bs_y+cs_z+d\sigma_{yz}+e\sigma_{zx}+f\sigma_{xy},$$

物体—応力方程式 $\dfrac{d\widehat{xx}}{dx}+\dfrac{d\widehat{xy}}{dy}+\dfrac{d\widehat{xz}}{dz}=X$ に入れ，ひずみを変位微分商で表わして，彼は次式を求めている。

$$a\frac{d^2u}{dx^2}+f_1\frac{d^2u}{dy^2}+e_1\frac{d^2u}{dz^2}+f\frac{d^2u}{dxdy}+e\frac{d^2u}{dxdz}$$
$$+(f_1+b)\frac{d^2v}{dxdy}+(e_1+c)\frac{d^2w}{dxdz}$$
$$+d\left(\frac{d^2v}{dxdz}+\frac{d^2w}{dxdy}\right)+f\frac{d^2v}{dx^2}+e\frac{d^2w}{dx^2}=X$$

これは後でわかるように，ねじり問題に必要となる唯一の方程式である。

それは8個の独立定数を含み，Xは物体の加速度でなく，物体力で，原点に向って作用することが注目されよう。サン・ブナンは，言うまでもなく，この方程式を彼の問題に適用する前に，定数の数をかなり減らしている。モアニオの『静力学』(637頁)では，彼はXの代わりにより一般的な記号 $-\rho X$ を採用している。ここでρは密度である。

〔5.〕 この章の結びの頁（278—288頁）はここで初めて現われる問題を含んでいる。それはかなり興味があるので，列挙する価値がある。その節は『**分離破壊に対する抵抗または物体組織の累進的でかつ危険な変化に対する抵抗の条件**』(*Conditions de résistance à la rupture éloignée ou à une altération progressive et dangereuse de la contexture des corps*) と題されている。

(a) この表題が誤解される性質をもつことはすでに述べた。4節(γ)参照。先ず第一に，初期荷重はしばしば永久ひずみを生じ，それは累進的なものまたは危険なものでなくても，物体の形や弾性的均質性を変化させるかも知れない。第二に，物体が平易な状態にあっても，なお多くの場合に，一般的に言うフックの法則は，ほぼ弾性限度にいたるまでさえ，決して成立しないだろう。サン・ブナンは小さい永久ひずみと大きい永久ひずみを区別して第一の点を認めている。前者は『物体を**冷間加工する**かあるいはその部分をより安定した配列にするだけ』(278頁)で，後者は累進的に増大して『材質がやがて**弱くなる**』(239頁)か，さもなければ形の変化によって，構造物の価値がそこなわれる，と彼は考えている。しかし，彼は第二の点にはほとんど注目しなかったように思われる。というのは，280頁と286頁で，応力とひずみの比例を意味する伸び係数とすべり係数をためらうことなく用いているからである。同じ点がほとんど各々のねじり問題に繰り返されており，そこでは**破壊しない条件または凝集の強固さの条件**が示されている（たとえば，351頁，396頁など）。各々の場合に示されている応力とひずみの比例は本質上一つの限度があるが，多くの材料では，この限度の存在は目立つほどのものでなく，あるいは広範囲の平易な状態をもたない材料の場合には，難なく通り過ぎるかも知れない。

(*b*) サン・ブナンの手順へ進む前に，もう一つ所見を述べてみよう。彼は公式（280頁）

$$s_r = s_x\cos^2\alpha + s_y\cos^2\beta + s_z\cos^2\gamma$$
$$+\sigma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \sigma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$
$$+\sigma_{xy}\cos\alpha\cos\beta \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

から出発しているが，242頁で伸びとすべりとはその二乗を無視してよいほど小さいと仮定して，この式を得ている。ある材料では，破壊前，そして多分危険な永久ひずみに達する前に，この仮定は許されなくなると思われる。

(*c*) 著者は，材料の安定性に対して取られるべき固有の限度は**引張力**の限度ではなく，**伸び**の限度であることに注目して，はじめている。彼は，『物体を破壊させるのは伸びの程度である』という事実を最初に認識したのはマリオット（Mariotte）[1] である，としている。そして，$T=E\bar{s}$ で与えられる引張力限度をとることは，合理的で，時には便利ではあるが，T は問題の点における任意の面を横切る応力である必要はない，と述べている。ここで，$\bar{s}$ は伸び限度であり，E は伸び係数である。

そして，T は単に積 $E\bar{s}$，または離れていると仮定されたこの同じ小角柱に（つまり，一つの表面を通って），物体中のその位置に関係のある膨脹限度 $\bar{s}$ を与えることのできる力を表わすが，それが内部応力，または横断面が物体の一部をなしている間その横断面に垂直に支持された圧力を表わすのは時々で常にそうであるとは限らないことを忘れないならば，この種の記号は便利である。(280頁)

その特徴がラーメ，クレープシュおよびもっと近代の弾性学者達によって無視されているので，この所見はなお一層重要である。本書の1013*，1016節*の脚注と1567*節を参照のこと。

(*d*) 任意方向の伸びは上記の式(i)で与えられるので，次に，異方性物体においては限界伸びの分布がどのようになるかを求めねばならない。サン・ブナンは式(i)を顧慮して，その分布を特性ではだ円形であると仮定している。言い換えれば，彼は

$$\bar{s} = \bar{s}_x\cos^2\alpha + \bar{s}_y\cos^2\beta + \bar{s}_z\cos^2\gamma$$

ととっている。ここで，$\bar{s}_x$，$\bar{s}_y$，$\bar{s}_z$ は実験で決定すべき三つの定数で，だ円形分布の軸が座標軸に選ばれている。さて，安全の条件は $s/\bar{s}$ の最大値が1に等しいかあるいは1以下となる。微分学の通常の最大・最小の手順によって，$s/\bar{s}$ に対して次式を得る。

$$4\bar{s}_x\bar{s}_y\bar{s}_z\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_x}{\bar{s}_x}\right)\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_y}{\bar{s}_y}\right)\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_z}{\bar{s}_z}\right)$$
$$-\sigma_{yz}^2\bar{s}_x\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_x}{\bar{s}_x}\right)-\sigma_{zx}^2\bar{s}_y\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_y}{\bar{s}_y}\right)$$
$$-\sigma_{xy}^2\bar{s}_z\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_z}{\bar{s}_z}\right)-\sigma_{yz}\sigma_{zx}\sigma_{xy}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

この方程式の根は実数であることがわかっており，それらの最大値は1に等しいかあるいは1以下でなければならない。

材料がすべりひずみだけを受けると仮定すると，

$$s_x = s_y = s_z = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0$$

である。これより，

$$\frac{s}{\bar{s}} = \frac{\sigma_{yz}}{2\sqrt{\bar{s}_y\bar{s}_z}}$$

となる。

言い換えると，$\bar{s}$ が s の限度であるならば，$2\sqrt{\bar{s}_y\bar{s}_z}$ は σ_{yz} の限度であり，すべり限度を与える。それを $\bar{\sigma}_{yz}$ で表わそう。

同様に，$\bar{\sigma}_{zx}=2\sqrt{\bar{s}_z\bar{s}_x}$ と $\bar{\sigma}_{xy}=2\sqrt{\bar{s}_x\bar{s}_y}$ を得る。

そこで，サン・ブナンは式(ii)を次のように書き換えている。

$$\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_x}{\bar{s}_x}\right)\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_y}{\bar{s}_y}\right)\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_z}{\bar{s}_z}\right)-\left(\frac{\sigma_{yz}}{\bar{\sigma}_{yz}}\right)^2\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_x}{\bar{s}_x}\right)$$
$$-\left(\frac{\sigma_{zx}}{\bar{\sigma}_{zx}}\right)^2\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_y}{\bar{s}_y}\right)-\left(\frac{\sigma_{xy}}{\bar{\sigma}_{xy}}\right)^2\left(\frac{s}{\bar{s}}-\frac{s_z}{\bar{s}_z}\right)$$
$$-2\frac{\sigma_{yz}\sigma_{zx}\sigma_{xy}}{\bar{\sigma}_{yz}\bar{\sigma}_{zx}\bar{\sigma}_{xy}}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

この式は，六個の限界ひずみ $\bar{s}_x$，$\bar{s}_y$，$\bar{s}_z$，$\bar{\sigma}_{yz}$，$\bar{\sigma}_{zx}$，$\bar{\sigma}_{xy}$ がすべて独立で，すべり限度 $\bar{\sigma}$ の値が実験で求められねばならないとして採用してもよい，と彼は述べている。とにかく，$\bar{\sigma}_{yz}=2\sqrt{\bar{s}_y\bar{s}_z}$ の形の式は，実験データがないときだけに使用する必要がある。(284頁)

(*e*) 次の段落（25）において，サン・ブナンは，物体内のすべての点に対する $s/\bar{s}$ の求め方，それから，これらのすべての点に対するその最大値の取り方を説明している。

1に等しくすると，破壊に対する物体の抵抗の必要にして正に十分な条件が得られるだろう（284頁)。

この言葉がほとんど正確でないことは書き留めた。この最大値が起こる点は，ポンスレに従って**危険点**（*point dangereux*）と呼ばれており，その名は**破損点**（*fail-point*）と表現するのが便利である。この術語は必ずしも破壊を暗示するのではなく，単に「線形弾性[2]」が最初に**損われる**点を暗示するだろう。この点を考察して，サン・ブナンは一様抵抗の固体を簡明に定義するに至った。

しばしば，力の加えられ方によって，いくつかの**危険点**，または $s/\bar{s}$ の最大値が同じであるいくつかの点がある。伸ばされた形の物体内で，その横断面の各々においてそのような

1) 『水の運動論』(*Traité du mouvement des eaux*) 第二話の段落の第三と第六。

2) 私は「完全弾性」が数学教科書の著者によって用いられている意味で，すなわち，一般的に言うフックの法則あるいは応力一ひずみ関係の直線に従う弾性を意味して，「線形弾性」という語を用いる。

点があるとき，この物体は**一様抵抗**であると言われる。両端に加えられた力によって，角柱が単純に伸ばされ，またはねじられるとき，その角柱についても同様のことが言える。

（*f*） 次に，*x* 軸まわりのねじりの場合へ式(iii)が適用してある。ここでは，

$$s_x=s_y=s_z=\sigma_{yz}=0$$

で，これより

$$s/\bar{s}=\sqrt{(\sigma_{xy}/\bar{\sigma}_{xy})^2+(\sigma_{xz}/\bar{\sigma}_{xz})^2}$$

となる。

このようにして，限界条件

$$1\geqq\left(\frac{\sigma_{xy}}{\bar{\sigma}_{xy}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{xz}}{\bar{\sigma}_{xz}}\right)^2$$

を得る。

任意の方向の主すべり $\sqrt{\sigma_{xy}^2+\sigma_{xz}^2}$ は $\bar{\sigma}_{xy}$ と $\bar{\sigma}_{xz}$ とが半軸（*semi-axes*）であるだ円の半直線によって与えられることは明らかである。サン・ブナンは彼の論文中いたるところでやや異なった形式を用いている。μ_1，μ_2 をすべり係数，S_1，S_2 をすべり $\bar{\sigma}_{xy}$ と $\bar{\sigma}_{xz}$ を生じうるせん断とすると，**すべりによって破壊を生じない**（すなわち，線形弾性が**損われない**）条件は

$$1\geqq\left(\frac{\mu_1\sigma_{xy}}{S_1}\right)^2+\left(\frac{\mu_2\sigma_{xz}}{S_2}\right)^2$$

で表わされる。

ねじりによる破壊の物理的特徴について，二，三の一般的な所見を述べて，章は終わっている。

〔6.〕 第3章は288—99頁を占めている。それは端面と側面とが任意の一様引張荷重を受ける任意の底面の角柱の簡単な場合に関連がある。ラーメとクラペーロンは1828年の論文（本書の1011*節参照）で，等方性の簡単な場合を取り扱った。サン・ブナンは**混合法**または**半逆**（*semi-inverse*）**法**の例として，三つの弾性対称面があって，一対の交線 *x* が角柱の軸に平行である場合の解を与えている。彼は引張力が一定で，せん断力がいたるところで零であると仮定する。これは物体応力方程式を満足する。この場合，引張力の一定値は表面応力方程式で与えられる。そこで，応力—ひずみ関係は弾性定数と荷重によって変位微分商の値を与える。このようにして簡単な線形偏微分方程式の系に到達し，その解法はきわめてやさしい。各変位についての完全解は，その変位に相当する座標に比例する部分と，剛体として取り扱った角柱の最も一般的な変位のその変位の方向に分解された部分だけの一般積分とを与える。サン・ブナンは，292頁において，角柱の側面に加わる引張荷重が零であるとき，伸び係数の値を決定しており，293頁には，(1)角柱の軸が弾性対称軸であり，そして(2)材料が等方性である簡単な場合を考察している。1066*節参照。293頁には，上記の結果はもっともらしいが必ずしも唯一のものでないと考えて，その結果の正確さを疑った著述者が幾人かいると述べている。サン・ブナンは，それらは唯一のもので，この場合には疑いもなく真実であると断言しているが，私は彼の証明の本質には全く満足していない。というのは，それは一見して任意の弾性体に適用されるだろうと思われるからである。それは本質的に次の論法によっている。弾性方程式の任意の特殊積分を u_0，v_0，w_0 ととり，変位を u_0+u'，v_0+v'，w_0+w' に等しくおくと，物体力または表面荷重のない弾性方程式が得られる。「u'，v'，w' は零の力しか受けない角柱の点の変位であることがわかるだろう。**これらの変位はそれ自身零である**。それ故，われわれの式は完全で唯一の解を与える。」(294頁) これは角柱については真であるが，表面力または物体力のないとき，物体はひずみがないかまたは剛体変位のみをもつとは限らない。たとえば，円筒殻，球状薄膜または断面の小さい円環体をとって，それらを裏返しにすると，加えられた力がないのにひずみをもつ状態となる。

サン・ブナンは295頁において，変位は大きいが，それらの微分商が小さい値にとどまっているならば，角柱についての彼の結果はやはり成り立つことを示している。

〔7.〕 さらに一般的な問題を解く方法が296頁に示されている。任意の形状の均質で異方性の物体が，物体中いたるところで，また表面で一定値をとる応力 $\widehat{xx}$，$\widehat{yy}$，$\widehat{zz}$，$\widehat{yz}$，$\widehat{zx}$，$\widehat{xy}$ の合力である表面荷重 L を受けるものと仮定する。そのとき，六つの方程式が得られ，それから21個の弾性定数によって六つのひずみを求めることになる。これらは六つの簡単な偏微分方程式で，直ちに変位を与える。サン・ブナンは任意

の方向の伸び係数がどのようにして36個（21個または15個）の弾性定数の関数として得られるかを示唆している。本書の135—7，198(c)，306—8および796*節参照。

〔8.〕 この章の最後の節（§33，297—9頁）は，サン・ブナンがしばしば言及する機会を得た一つの問題に関係している。次のような原理が含まれている。

その原理は，**角柱の端末あたりでの力の適用と分布のモードは**角柱の長さの残りの部分に生じる目立った結果とは**無関係**である，ということである。したがって，十分な近似度で，加えられる力を，それに**等価な**静的力によって常に置き替えることができる。等価な力とは，完全に正確に言うと伸び，曲げ，ねじりの公式を必要とするような分布と同じ全モーメントおよび合力をもっているものである。（説明Ⅰ　22頁）

サン・ブナンは力の分布の影響が及ぶと考えている角柱の部分を明白に述べておらず，**その長さの残りの部分に**という言葉はややあいまいである。論文そのものでは，彼は**力の働く点にきわめて近い点だけを除いて**という言葉を用いている（299頁)。しかし，**説明Ⅰ**の22頁の脚注に注目することによって，彼が影響が及ぶと想像している領域を，恐らくある程度把握することができる。

角柱の端末が理論的に計算されたひずみの系を生じる荷重分布と静的に等価な任意の荷重系を受けるものと仮定する。端末に理論的な分布をもつ二つの等しく反対方向の力を加えよう。これらの内の一つは理論的なひずみを生じ，他のものは実際の荷重分布と静的なつり合いにあるだろう。このようにして，端末は二つの等価で，かつ反対方向の力の系に作用される。これらの系は角柱の端にある小さな変位を生じるだろう。そしてこれらの変位は角柱が理論的な分布と実際の分布との差によって影響される範囲を判断させる。サン・ブナンは，物体の小さな部分に働くつり合いにある力の影響はそれらの力が働く部分を越えてきわめて小さな範囲にしか及ばないことを，脚注で述べている。

著者は彼の論文の一つを読んで，説明しながら，アカデミーの聴衆の前で，この種の二つの実験をした。それらは単に弾性ゴムの角柱をやっとこで挟むことと，同じ材料の細長い薄片を，その縁を二つの反対方向に引張りながら，横方向に膨らませることであった。すべての人がそれらの実験を繰り返して，**第一の場合には押した跡がその幅を越えて，第二の場合には膨らみがその広さを越えて，ある距離に及ばないことを体験することができる。**

読者はこの問題が**ナヴィエ**（*Navier*）の版の40—41頁および**クレープシュ**（*Clebsch*）の版の174—7頁に，さらに進んで取り扱われていることを見出すだろう。実際の構造物で，任意の与えられた理論的な荷重分布を保証することはほとんど不可能であるから，その原理は第1級の重要性をもっている。端末は一般に理論的な研究の及ばない形をとるだろうし，荷重系に静的に等価なものだけが，実際に確かめうるだろう。たとえば，棒にかかる引張荷重は荷重を支えるナットによって加えられ，ナット自身は棒に切られたねじの山によって支えられているということが起こりうる。

〔9.〕 サン・ブナンの第4章は**半逆法**によって曲げ問題を扱っている。ここで最初に公表された重要な結果は，よく知られた曲げについての論文で，後ほど詳しく考察される。本書の69節以下参照。

この章を通して著者は三つの弾性主面を仮定しており，その一つは横断面に一致し，他の二つは断面の図心を結ぶ線，すなわち角柱の軸の中で交差する。このようにして，彼は彼の記号ではっきり12個の独立係数を含む公式を使用しているが，直ちにこれらを3個の独立係数（E，ε，ε'）と2個の係数（f，e）に減らしている。303，311—313頁参照。

サン・ブナンが次のように述べているのは正しい。

曲げようとする力の作用のもとで，角柱の点の変位を正確に，かつ一般的に決定することは，今まで数学者達の最も骨の折れる研究からもれていた。（299頁）

しかし，彼の解法は**すべて**の端末の荷重分布についての問題を解決しないとはいえ，実際には，たとえば円柱のねじりのクーロンの解と同様に，ほとんど合った近似である。理論において出てくるような引張荷重とせん断荷重の分布は実際には得られず，小さい面積の上のそれらの静的に等価なもので甘んじなければならない

ことは，いくら繰返しても繰返しすぎることはない（8節参照)。しかし，サン・ブナン自身が言っていることを聞こう。

やはり，上記の結果は全く厳密な仕方で適用できるものではない。

しかし，先の解析によれば，端末であろうとなかろうと，任意の二つの断面にこんな風にして力が加えられ，分布されると，中間のすべての断面上で事情は全く同じであろうこと，また角柱の全長さにおいて，変位は上で求められた別の式によって表わされるだろうことが常に証明される。それ故，公式は端末から遠く離れた部分を考えるか，または曲げの力の作用点を考えるかに応じて，角柱の実際の内部の状態が収斂する状況を示す。数多くの現象の最初の原因の影響を最終的に打消す不変の原因の連続作用によって，時間の経過とともに生み出される状態に似た一種の恒久的な状態が，空間において，ここに確立される。(314頁)

このようにして，曲げの問題についてのサン・ブナンの解は問題の真の解である。というのは，他のどんな解が得られようとも，その解と彼の解との相違は，理論と実際との間だけでなく，任意の二つの実際の曲げの場合に起こるに相違ない端末荷重の差異に比べて，実際上取るに足りない項だけであろう。サン・ブナンの曲げの結果に異議を唱えることはクーロンのねじりの解に異議を唱えることが道理に合っているか不合理かとちょうど同じである。

〔10.〕半逆法で得られた解の唯一性に関して——理論的なせん断荷重および引張荷重が端末に加えられたと仮定して——サン・ブナンは307頁にいくつかの所見を述べているが，考察するのが適当である。変位は問題のすべての条件と方程式を満足すると述べた後，彼は次のように続けている。

そして，それらはそれを満足する唯一のものである。なぜならば，表面のすべての個所に圧縮や引張力を与えて，角柱の点の一つ（O 点）とそれを通る線素および面素（z 軸上，線素と yz 面上の面素）の方向を決めて，したがって，曲げから生じる変位に付け加わる全体の変形も回転もあり得ないと仮定すると，変位の問題は完全に決定されるからである。(307頁)

それから彼は，294頁と同様に，変位が，求めた特殊解に付加的な未知部分（u'，v'，w'）を加えたものに等しいと置いて進んでおり，これらの後者のものは代入で方程式から荷重の項が消えることで明らかなように，零の荷重系による変位であるから，零にならなければならない，と彼は論じている。弾性方程式の解の唯一性に関する証明のこの概説は，クレープシュ(Clebsch)によって採用され，発展させられた。彼の『弾性学』(*Theorie der Elasticität*) 第1章，§21参照。私はある程度用心してその証明を応用する必要があることを上で示唆した。6節参照。

〔11.〕曲げ問題を取り扱うとき，サン・ブナンは縦方向変位と横荷重を仮定して，これから横方向変位と端末荷重とを推論している。縦方向変位の値は疑いもなく，その問題のベルヌーイ＝オイラーの解によって示唆されたものであるが，この章では，それらは一様曲げ，すなわち円弧になる各縦方向「繊維」の曲げのより簡単な場合の考察から，ごく自然に出てくると思われる。292—304頁参照。

サン・ブナンは彼の問題について二つの一般化を行っている。第一のもの(306頁)は端末のせん断荷重のほかに，端末の引張荷重がある場合についてである。しかし，このような荷重が負で，角柱が横断面の寸法に比べてかなり長いとき，このような荷重の座屈作用の問題が起こることを述べておく必要がある。これはこの本の第1巻で言及した問題である。911*参照。サン・ブナンはそのことにふれていない。第二の一般化は大変形，すなわちここで**任意の大きい曲げへのこの解の拡張**(*Extension de cette solution à une flexion aussi grande qu'on vent*)と名付けられている場合についてである。私は後の著者達(たとえばキルヒホッフ)によって採用されている示唆として，次の所見を引用する。

u，v，w を与える公式は，それから導いた微分方程式と同様，小さいたわみしか生じないきわめて小さい変位にしか適用されない。しかし，両端がほとんど接触するほどに曲げられる——このことは材料の組織を全然変えないで可能である——長くて薄い弾性棒の変位のように，大きさもまた任意に大きな変位をそれから導くことができる。なぜならば，曲率半径 ρ よりはるかに小さい長さの部分——そこで，同じ物体を心のうちで分割することができる——の各々の相対変位や変形は小さくとどまりうるからである。端に大きな変位を生じるのはこのような小さな変位の累積である(308頁)。

12. 曲げの一般の問題を扱うその章の節308—313頁は，リウヴィユの雑誌の論文に再録されており，

後に考察しょう。69節以下参照。

二つの結果が312頁に示されているが，証明されていない。これらの第一のものはただ円断面の場合に関係している。それは方程式の定数Cを零とおくとき，リウヴィユの雑誌の中の論文の方程式（56）に一致する（本書の86節の方程式25を参照）。これらの第二のものは長方形断面の場合に関係している。それは近似解である。リウヴィユの雑誌の中の論文は正確な解を与えており，この近似解ではない。しかし，近似解へ導く手段を補充することは容易である。リウヴィユの雑誌の中の論文の式（91）に，$F(y,\ z)$ の正確な値が，式（102）によって決定される $F_1(y,\ z)$ に付随して与えられている。$F_1(y,\ z)$ を y と z のベキに展開すると，z だけを含む項は式（103）によって消えるだろう。そこで，次の二つの項はそれぞれ y^2z と z^3 を含むだろう。このことは近似解としてねじりの論文の中の式（85）のものと同じような形をとることを示唆する。この形をとって，$\widehat{xz}$，すなわち $G'\left(\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz}\right)$ を計算すると，次のように求まる。

$$G'g_0+\frac{G'P}{2EI}\left\{(K-2\varepsilon)y^2+(E-fK)\frac{z^2}{e}\right\}$$

そこで，$y=0$ および $z=c$ のとき，これが零になるためには，

$$g_0=-\frac{Pc^2(E-fK)}{2EeI}$$

でなければならない。

そこで，サン・ブナンは $\int\widehat{xz}\,dw=-P$ と仮定しており，これから彼がこの場合に用いているKの値が導かれる。312頁下から3行目参照。

13. サン・ブナンは311頁において $y=0$ および $z=0$ のとき，$F=0$，そして $dF/dz=0$ であると言っている。h と k は非常に小さい量を示すものとすると，原点における u の値を u_0 で示して，原点にごく近い点における値は

$$u_0+\left(\frac{du}{dy}\right)_0 h+\left(\frac{du}{dz}\right)_0 k$$

となるだろう。

さて，u は y の偶関数であるから，$\left(\dfrac{du}{dy}\right)$ は零である。したがって，u_0 だけでなく $\left(\dfrac{du}{dz}\right)_0$ も零であるならば，u の値は原点近くの要素（*an element*）のいたるところで零となる。

〔14.〕316—318頁は細心の注意を払う価値がある。それらは1843年の論文（1581*節参照）に一部公表され，ペルシュ（Persy）の提案をさらに追求したものである。811*節参照。すなわち，サン・ブナンは荷重面が横断面の一組の主軸の面と一致しないとき，曲がりの面を見出している。

Oz,Oy を面積 ω の任意の横断面の図心Oにおける主軸とし，κ_z，κ_y をこれらの軸のまわりの回転半径，また ϕ，ψ を荷重面と曲がり面がそれぞれ Oz と角柱の軸とを通る面となす角とする。そこで，サン・ブナンは容易に次式を示している。

$$\tan\psi=\frac{\kappa_z^2}{\kappa_y^2}\tan\phi,\qquad \frac{1}{\rho}=\frac{M}{E\omega}\sqrt{\frac{\cos^2\phi}{\kappa_y^4}+\frac{\sin^2\phi}{\kappa_z^4}}$$

ここで，$1/\rho$ は曲率，Mは曲げモーメント，そしてEは縦方向伸び係数である[1]。

縦方向伸びだけが危険を生じると仮定して，サン・ブナンは，$s_0=T_0/E$ が安全な伸びの限界であるならば，

$$M\leqq\frac{T_0\omega}{z\dfrac{\cos\phi}{\kappa_y^2}+y\dfrac{\sin\phi}{\kappa_z^2}}\ \text{の最小値}$$

であると推論している。

長方形（$2b\times2c$）については，

$$M\leqq\frac{4T_0b^2c^2}{3(b\cos\phi+c\sin\phi)}$$

だ円（$2b\times2c$）については

$$M\leqq\frac{T_0\pi b^2c^2}{4\sqrt{b^2\cos^2\phi+c^2\sin^2\phi}}$$

を得ている。

これらと同じ結果を彼はナヴィエ（*Navier*）の彼の版で再録し，かなり追加している。52—60頁，122—126頁，そして128—136頁。実際に，荷重面が慣性上の対称面の一つでないとき，曲がり面と荷重面との間の関係を研究する実際的な重要性を強調したのは，サン・ブナンが最初であると断言できる。

〔15.〕その章は，曲げを受けるはりの横断面は弾性限度内でさえ平面のままでない，というサン・ブナンのきわめて重要な発見の推論で終わっている。また，横断面の輪郭の変化についての研究もある（318—323頁）。後にこれらの問題にもどることにするが，合間に，サン・ブナンが彼の新しい手順の結果に正当に満足を感じていたある証拠として，その章の結言を引用しよう。

第Ⅳ章から，弾性体のつり合いの問題の解の混合法では，その条件が正しいことを知ることで，既知の結果を確かめることができるだけでなく，さらに，曲がりの状況について新しい結果を与えることで，それらの結果を完全なものにすることができる，ということがわかる。

1）第1式は曲がりの面が荷重面に共役な慣性だ円の直径（中立軸）に垂直であることを幾何学的に示している。171節参照。

〔16.〕サン・ブナンの第5章はねじりを定義し，半逆法によって一般方程式を推論している。それは323—333頁を占めている。

横断面の元の平面性の維持を含まないねじりの定義が次の段落に入れられている。

そして，**変位の一部分**あるいはそれらの比の一部を与え，それについて，これらの変位が稜に平行な軸のまわりの**ねじりを生じたと仮定しよう**。そのねじりは**最初軸に垂直なある同一断面内の異なる点の横方向変位からなっており，その変位は他の断面の対応点の変位とは同じ軸のまわりの全く同じ角の回転しかちがっていない**。したがって，最初軸に平行な直線上に対応していた点は，二つの同じ断面の点について，同じ角度回転させることによって，再び対応する位置にもどすことができる。(324頁)

ここで，サン・ブナンがねじりの一般方程式に到達している方法の大要を述べよう。

〔17.〕ねじりの軸を x 軸にとり，ねじりの方向は y 軸より z 軸へと向かうとしよう。断面積を ω で示し，$\omega\kappa_z^2=\int y^2 d\omega$，$\omega\kappa_y^2=\int z^2 d\omega$ と書こう。これらは断面慣性モーメントである。単位長さ当たりのねじれを τ としよう。すなわち，一つの断面の変位した点の動径を引き，この断面から距離 ξ にある断面の対応点の動径を引くと，第二の動径は最初の動径に平行な線と，円弧の長さが $\tau\xi$ である角になる。この角は y 軸から z 軸へ向かって測られる。この言葉はねじれが一定であることを暗示しているが，τ が一定でないときの τ の意味は，ξ を無限小と考える限り，任意の点で前と同じ方法で決められるだろう。

上記のねじりの定義から直ちに次の結果が導かれる。

$$dv/dx=-\tau z,\quad dw/dx=\tau y \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

横荷重がないことを考慮すると，断面の周辺のあらゆる点について，次の方程式が得られる。

$$\widehat{xz}\,dy-\widehat{xy}\,dz=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

329頁には，サン・ブナンは本書の10節と同様に，点，線および要素面を固定して，二つの断面で角柱を分割した各々の短かい要素が相対的に小さいゆがみだけを受けるならば，角柱の長さが断面の一辺に比べて大きいとして，端面間の全ねじりはかなり大きいかも知れないと述べている。そこで，全変位は各々の短かい要素についての上記の方程式の解から総和によって求めることができる。

本書の4節 (θ) の方程式を参照して，容易に次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{xy}&=f_1(du/dy-\tau z)\\ \widehat{xz}&=e_1(du/dz+\tau y)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

これより，断面上のすべての応力の x 軸のまわりのモーメントを M とすると，

$$M=\int_0^\omega d\omega[e_1(du/dz+\tau y)y-f_1(du/dy-\tau z)z] \qquad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

である。

これは古い理論——それは $M=e_1\tau\int_0^\omega d\omega(y^2+z^2)$ を示した——と $e_1=f_1$ かつ $du/dz=du/dy$ のときにのみ一致することがわかるだろう。このことは，du/dx が一定であると仮定されているので，$u=0$，すなわち断面が平面で，かつ軸に垂直のままであるという古い理論になる。本書の4節 (κ) の式および上記の(ii)式に代入して，物体変位および表面変位の方程式について，次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&ad^2u/dx^2+f_1d^2u/dy^2+e_1d^2u/dz^2\\ &\qquad +fd^2u/dx\,dy+ed^2u/dx\,dz\\ &\qquad\qquad +(ey-fz)d\tau/dx=0\\ &e_1(du/dz+\tau y)dy-f_1(du/dy-\tau z)dz=0\end{aligned}\right\} \cdots(\mathrm{v})$$

サン・ブナンは直ちに（331頁）

$$d^2u/dx^2=fd^2u/dx\,dy=ed^2u/dx\,dz=0$$

ととって，これらの方程式を簡単にしている。これらは du/dx，すなわち縦方向伸びが一定または零であるという仮定から，あるいはそれはねじりの軸に平行な線に沿ってのみ一定で，かつ弾性の主面がこの軸に垂直である（すなわち，$e=f=0$）という第二の仮定から，直ちにこうなる。

一般に $e_1=\mu_2$，$f_1=\mu_1$ なる記号を採用することにすると，われわれの式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\mu_1d^2u/dy^2+\mu_2d^2u/dz^2=0\\ \mu_2(du/dz+\tau y)dy-\mu_1(du/dy-\tau z)dz=0\end{aligned}\right\} \cdots(\mathrm{vi})$$

サン・ブナンは，彼の結果の形を簡単にするために，続く四つの章で $\mu_1=\mu_2=\mu$ ととっている。さらに，曲げの問題を同時に取り扱うことによって最初に持ち込まれる複雑さをさけるために，サン・ブナンは

$$s_x=s_y=s_z=\sigma_{xy}=0$$

ととっている。

後になって，クレープシュが方程式の一般形を保つことによって，ねじりと曲げの二つの問題を組み合わせたことがわかるだろう。

論文の次の四つの章VI—IXは，種々の断面の角柱のねじりで占められている。参考のために，ここに結果を簡単に示そう。原論文が手に入らなくても，読者は自ら証明を推論するのに，ほとんど困難を感じないだろう。同時に，私はサン・ブナンの討論に含まれている一，二の重要な点に注意を引くことにしよう。

本書の18節以降についての訳文は，逐次，本論集の続号に発表する予定である。

本書の著者アイザック・トドハンター（1820—1884）は，イギリスの数学史家である。ロンドンのユニバーシティ・カレッジの夜学に学ぶ。1842年にロンドン大学から，また1848年にケンブリッジのセント・ジョンズ・カレッジから学位を受け，翌年同カレッジの評議員に選ばれ，講師となった。数多くの数学教科書を著しており，明治時代のわが国の数学教育に大きな影響を及ぼしている。**『弾性学と材料力学の歴史』**は彼の晩年の著作で，死後カール・ピアソンによって仕上げられた。

カール・ピアソン（1857—1936）はイギリスの数理統計学者である。1875年にケンブリッジのキングス・カレッジに入学し，79年にスミス賞の試験に挑戦，このときの試験官がストークス，マックスウェル，ケーリー，トドハンターの４人で，結果は不首尾に終ったが，トドハンターは好意的な評価をしていたようである。1884年ユニバーシティ・カレッジの応用数学科の教授となり，当時のケンブリッジ大学出版部の編集長からトドハンターの未完の著**『弾性学と材料力学の歴史』**の完成を依頼された。本書中の節番号の〔　〕で囲まれた部分はピアソンによるもので，第１巻ではおよそ半数が，第２巻では大部分がそうである。ピアソンには弾性問題のほか，遺伝と進化の問題などの統計学的研究に，非常に多くの論文や著書がある。

わが国における弾性学と材料力学の歴史的発展に関する研究は，いままでのところあまり行なわれていない。書物として，Ｓ.Ｐ.ティモシェンコ著の**『材料力学史』**（1953年）が翻訳出版されている程度である。〔この**『材料力学史』**も，弾性学と材料力学の史的発展の文献の目録として，トドハンターの著書を参考にしている。〕しかし，最近，わが国においても，大学で科学史や技術史の講義が開かれるようになり，色々な科学・技術分野での歴史的発展の様子に関心が寄せられるようになってきている。このような事情もあって，弾性学と材料力学の分野における歴史的発展の研究には，この書に負うところが大きいと考え，訳出した。

トドハンターはこの書の他に歴史を扱ったものとして，**『19世紀における変分法の進歩の歴史』**，**『確率の数学理論の歴史』**，**『引力についての数学理論と地球の形状の研究の歴史』**を著している。このうち二番目の書物は**『確率論史』**として，桃山学院大学安藤洋美教授により翻訳され，出版（現代数学社1975年）されており，三番目の書物の一部は桃山学院大学後藤邦夫教授他１名により翻訳され，雑誌**『現代数学』**（現代数学社）に連載された。

このようなことから，**『弾性学と材料力学の歴史』**の翻訳について，安藤教授より紹介いただき，多くのご教示を賜った。心から感謝いたします。

〔訳　者〕